雪兰莪暨吉隆坡福建会馆 新纪元学院 联合主办

ANJURAN BERSAMA
PERSATUAN HOKKIEN SELANGOR DAN KUALA LUMPUR
&
KOLEJ NEW ERA

第二十八届（2013 年度）
雪隆中学华罗庚杯数学比赛
PERTANDINGAN MATEMATIK PIALA HUA LO-GENG ANTARA SEKOLAH-SEKOLAH MENENGAH DI NEGERI SELANGOR DAN KUALA LUMPUR YANG KE-28(2013)

~~高中组~~
BAHAGIAN MENENGAH TINGGI

日期　: 2013 年 8 月 25 日 （星期日）
Tarikh : 25 Ogos 2013 (HariAhad)

时间　: 10:00→12:00（两小时）
Masa　: 10:00→12:00（2 jam）

地点　: 新纪元学院 UG 活动中心
Tempat : UG Hall Kolej New Era
Block C, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit,
43000 Kajang, Selangor

说明

1. 不准使用计算机。
2. 不必使用对数表。
3. 对一题得 4 分，错一题倒扣 1 分。
4. 答案E：若是“以上皆非”或“不能确定”，一律以“***”代替之。

INSTRUTIONS

1. Calculators not allowed.
2. Logarithm table is not to be used.
3. 4 marks will be awarded for each correct answer and 1 mark will be deducted for each wrong answer.
4. (E)***indicates “none of the above”.

---

1. 已知 $S=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{998^2}\right)\left(1-\frac{1}{999^2}\right)$，求 S。
Given that $S=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{998^2}\right)\left(1-\frac{1}{999^2}\right)$, find S.

A. $\frac{1}{999}$ B. $\frac{2}{999}$ C. $\frac{499}{999}$ D. $\frac{500}{999}$ E. ***

2. 由 100 到 999 这 900 个三位数中，有多少个数，其三个数字之和不大于 14?
Among the 900 three-digit numbers from 100 to 999, how many of them the sum of the three digits is not larger than 14?

A. 450 B. 470 C. 485 D. 490 E. ***

3. 求满足不等式组 $\begin{cases} n^2-12n+20\ge 0 \\ (2n-33)(n-1)^2(n+5)<0 \end{cases}$ 的所有整数 n 之和。
Find the sum of all the integers n that satisfy the system of inequalities

$$\begin{cases} n^2-12n+20\ge 0 \\ (2n-33)(n-1)^2(n+5)<0 \end{cases}$$

A. 83 B. 79 C. 72 D. 66 E. ***

4. 如图 1 所示，ABCDEEFGH 是一正立方体，ACEG 是一正四面体。求立方体与四面体的体积之比。
As shown in the figure 1, ABCDEFGH is a cube, ACEG is a regular tetrahedron. Find the ratio of the volume of the cube to the volume of the tetrahedron.

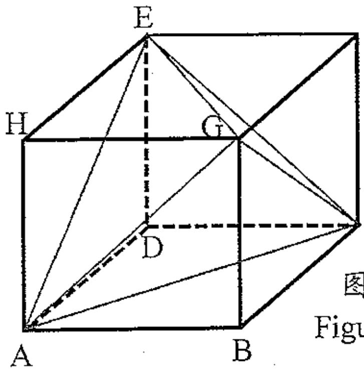

图 1
Figure 1

A. 8 : 1 B. 6 : 1
C. 4 : 1 D. 3 : 1
E. ***

5. 求 $f(x) = 2\sin x + 3\sin(x + 90°)$ 的最大值，其中 $0° \le x \le 360°$。
Find the maximum value of $f(x) = 2\sin x + 3\sin(x + 90°)$, where $0° \le x \le 360°$.

A. 5　　B. $\sqrt{13}$　　C. 3　　D. 2　　E. ***

6. 图 2 中，$\angle BAC$ 是直角。已知 AB = 7， AD = 9，BD = 5，AC = 12，求ΔADC 的面积。
In the figure 2, $\angle BAC$ is a right angle. Given that AB = 7, AD = 9, BD = 5, AC = 12, find the area of ΔADC.

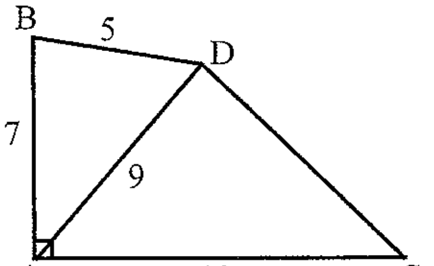

图 2
Figure 2

A. 45　　B. 48
C. 42　　D. 54
E. ***

7. 如图 3 所示，A，C 两点在半径为 9 的圆上；B，C 两点在半径为 7 的圆上。两圆外切于点 C。AB 为两圆的公切线。求 BC 的长。
As shown in the figure 3, the two points A, C lie on the circle with radius 9; the two points B, C lie on the circle with radius 7. The two circles are tangent to each other externally at C. AB is a common tangent of the two circles. Find the length of BC.

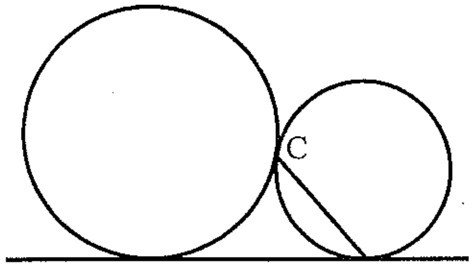

图 3
Figure 3

A. 10　　B. $\frac{21}{2}$　　C. $3\sqrt{14}$　　D. 12　　E. ***

8. 有四个学生，分别在各自的纸上随意写上 1、2、3、4、5、6 中的其中一个数字。求这四个学生所写的数字各不相同的概率。
There are four students, each randomly writes a digit among 1, 2, 3, 4, 5, 6 on his own piece of paper. Find the probability that the digits written by these four students are all distinct.

A. $\frac{5}{18}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$　　E. ***

9. 已知 $f(x) = 3g(x) - 4h(x) + 10$，且 $g(x)$ 与 $h(x)$ 是奇函数，即 $g(-x) = -g(x)$，$h(-x) = -h(x)$。若 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 区间的最小值是 -9，求 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 区间的最大值。
Given that $f(x) = 3g(x) - 4h(x) + 10$, and $g(x)$ and $h(x)$ are odd functions. Namely, $g(-x) = -g(x)$, $h(-x) = -h(x)$. If the minimum value of $f(x)$ on the interval $[0, \infty)$ is -9, find the maximum value of $f(x)$ on the interval $(-\infty, 0]$.

A. 9　　B. 19　　C. 24　　D. 29　　E. ***

10. 若七位数$777a77b$能被 99 整除，求$3a+b$之值。

If the seven-digit number $777a77b$ is divisible by 99, find the value of $3a+b$.

A. 16　　B. 24　　C. 28　　D. 34　　E. ***

11. 求$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$的最小值，其中$x$和$y$是实数。

Find the minimum value of $\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$, where x and y are real numbers.

A. 4　　B. $\sqrt{26}+\sqrt{5}$　　C. 7　　D. 5　　E. ***

12. 如图 4 所示，ABCD 为一四边形。AC 与 BD 相交于 E。已知ΔABE 与ΔCDE 的面积分别为 4 及 9，求四边形 ABCD 的面积的最小可能值。

As shown in the figure 4, ABCD is a quadrilateral. AC and BD intersect at E. Given that the areas of ΔABE and ΔCDE are 4 and 9 respectively, find the smallest possible value for the area of the quadrilateral ABCD.

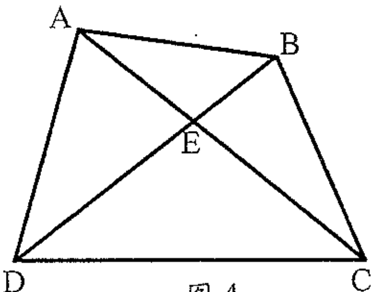

图 4

Figure 4

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27　　E. ***

13. 已知 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2012}, a_{2013}$ 是一个等差数列，其和 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2012}+a_{2013}=1098$。求$a_7+a_9+a_{11}+\ldots+a_{2005}+a_{2007}$。

Given that $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2012}, a_{2013}$ is an arithmetic progression (A. P.) with sum $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2012}+a_{2013}=1098$. Find $a_7+a_9+a_{11}+\ldots+a_{2005}+a_{2007}$.

A. 549　　B. 548　　C. 547　　D. 546　　E. ***

14. 已知ξ为范集，$n(\xi)=100$。A，B 及 C 为ξ的三个子集，$n(\mathrm{A})=44$，$n(\mathrm{B})=26$，$n(\mathrm{C})=60$。求$n((\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\mathrm{C})$的最小可能值。

Given that ξ is the universal set with $n(\xi)=100$. A, B and C are three subsets of ξ with $n(\mathrm{A})=44$, $n(\mathrm{B})=26$ and $n(\mathrm{C})=60$. Find the smallest possible value of $n((\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\mathrm{C})$.

A. 0　　B. 4　　C. 24　　D. 30　　E. ***

15. 令$S=\dfrac{1}{\frac{4}{1981}+\frac{4}{1985}+\frac{4}{1989}+\ldots+\frac{4}{2009}+\frac{4}{2013}}$。求小于$S$的最大整数。

Let $S=\dfrac{1}{\frac{4}{1981}+\frac{4}{1985}+\frac{4}{1989}+\ldots+\frac{4}{2009}+\frac{4}{2013}}$. Find the largest integer that is smaller than S.

A. 54　　B. 55　　C. 56　　D. 57　　E. ***

16. 已知 a 为一正二位数且能被 7 整除，b 为一能被 13 整除的正整数，且 $a+221=b$。求 $3a+b$ 的值。

Given that a is a two-digit positive integer divisible by 7, b is a positive integer divisible by 13, and $a+221=b$. Find the value of $3a+b$.

A. 481　　B. 494　　C. 585　　D. 598　　E. ***

17. 有 9 盒糖果，分别有 13，18，20，24，25，33，37，39 及 41 颗糖果。现将一盒糖果分给 A，并将其余的 8 盒分给 B，C 及 D 三人。如果 B，C 及 D 所分得的糖果颗数的比为 2 : 2 : 3，求 A 与 D 两人所分得的糖果总颗数。

There are 9 boxes of candies that contain respectively 13, 18, 20, 24, 25, 33, 37, 39 and 41 pieces of candies. One of the boxes is given to A, and the remaining 8 boxes are given to B, C and D. If the ratio of the number of pieces of candies obtained by B, C, D are 2 : 2 : 3, find the sum of the number of candies obtained by A and D.

A. 125　　B. 126　　C. 127　　D. 128　　E. ***

18. 已知 α 和 β 是方程式 $x^2-2x-5=0$ 的两个相异的实根，求 $\alpha^5+101\beta$ 的值。

Given that α and β are the two distinct real roots of the equation $x^2-2x-5=0$, find the value of $\alpha^5+101\beta$.

A. 342　　B. -62　　C. 202　　D. -202　　E. ***

19. 已知 R 是坐标平面上满足不等式 $3|x|+4|y|\le 15$ 的点所组成的区域。求在 R 内最大的圆的面积。

Given that R is the region on the coordinate plane consists of the points satisfying the inequality $3|x|+4|y|\le 15$. Find the area of the largest circle contained in R.

A. 5π　　B. 8π　　C. 9π　　D. 12π　　E. ***

20. 如图 5 所示，R_1 是由曲线 $y=10x-x^2$ 与直线 $y=kx$ 所围成的区域，R_2 是一个由直线 $y=kx$，x 轴及曲线 $y=10x-x^2$ 所围成的区域。已知 R_1 与 R_2 的面积之比为 64:61，求 k。

As shown in the figure 5, R_1 is the region bounded by the curve $y=10x-x^2$ and the line $y=kx$, R_2 is the region bounded by the line $y=kx$, x-axis, and the curve $y=10x-x^2$. Given that the ratio of the areas of R_1 and R_2 is 64:61, find the value of k.

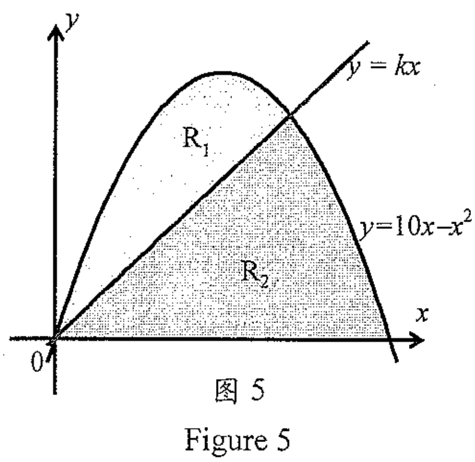

图 5

Figure 5

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. ***

21. 求$x^{128}+x^{96}+x^{64}+x^{32}+1$被$x^4+x^3+x^2+x+1$除所得的余式。

Find the remainder when $x^{128}+x^{96}+x^{64}+x^{32}+1$ is divided by $x^4+x^3+x^2+x+1$.

A. 0　B. 4　C. x^3+x^2+x+1　D. x^3+x^2+x+2　E. ***

22. 若x是满足方程式$x^4-4x^3-62x^2+4x+1=0$的实数，求$x-\frac{1}{x}$的最小值。

If x is a real number that satisfies the equation $x^4-4x^3-62x^2+4x+1=0$, find the smallest value of $x-\frac{1}{x}$.

A. 2　B. -2　C. -6　D. -8　E. ***

23. 若a、b是实数且分别满足$3a^3-2a^2+a-4=0$及$4b^3+2b^2+8b+24=0$。求ab的值。

If a, b are real numbers satisfying $3a^3-2a^2+a-4=0$ and $4b^3+2b^2+8b+24=0$ respectively, find the value of ab.

A. 2　B. 1　C. -1　D. -2　E. ***

24. 求小于$(3+2\sqrt{2})^5$的最大整数。

Find the largest integer that is less than $(3+2\sqrt{2})^5$.

A. 6723　B. 6724　C. 6725　D. 6726　E. ***

25. 令$\lfloor x\rfloor$为不大于x的最大整数，如：$\lfloor 3.7\rfloor=3$，$\lfloor 3\rfloor=3$。已知方程式

$$\left\lfloor\frac{3x}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{14}\right\rfloor=x$$

满足此方程式的正实数有多少个?

Let $\lfloor x\rfloor$ denotes the largest integer not larger than x. For example: $\lfloor 3.7\rfloor=3$, $\lfloor 3\rfloor=3$. Given the equation

$$\left\lfloor\frac{3x}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{14}\right\rfloor=x$$

How many positive real numbers satisfy this equation?

A. 209　B. 210　C. 420　D. 无限多 infinitely many　E. ***

26. 求满足方程式$\sqrt{8x^2-4x+1}+\sqrt{6x^2+1}=\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{5x}$的所有实数$x$之和。

Find the sum of all the real numbers x that satisfy the equation

$$\sqrt{8x^2-4x+1}+\sqrt{6x^2+1}=\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{5x}$$

A. 0　B. $\frac{5}{6}$　C. $\frac{7}{8}$　D. 2　E. ***

27. 已知 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+27}$。求 $S=f\left(\dfrac{1}{9}\right)+f\left(\dfrac{2}{9}\right)+f\left(\dfrac{3}{9}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{25}{9}\right)+f\left(\dfrac{26}{9}\right)$ 的值。

Given that $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+27}$. Find the value of $S=f\left(\dfrac{1}{9}\right)+f\left(\dfrac{2}{9}\right)+f\left(\dfrac{3}{9}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{25}{9}\right)+f\left(\dfrac{26}{9}\right)$.

A. 1　　B. 2　　C. 13　　D. 26　　E. ***

28. 爸爸有 15 粒一样的糖果要分给他的 5 个小孩，其中较小的 3 个小孩每人必须最少分得 1 粒。问共有多少种不同的分法？

A father has 15 pieces of identical candies to be distributed to his 5 children. The 3 younger children should each get at least 1 piece. How many different ways of distribution are there?

A. 3876　　B. 1820　　C. 969　　D. 560　　E. ***

29. 求满足方程式 $\log_3 x+8\log_x 3=6$ 的所有实数 x 之和。

Find the sum of all the real numbers x that satisfy the equation $\log_3 x+8\log_x 3=6$.

A. 4　　B. 36　　C. 90　　D. 246　　E. ***

30. 已知 x, y, z 是正数且满足 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$，求 x^2yz 的最大值。

Given that x, y, z are positive numbers satisfying $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$, find the largest value of x^2yz.

A. 3　　B. 6　　C. 12　　D. 24　　E. ***

31. 如图 6 所示，A，B，C，D 四点在圆上。E 为 AC 与 BD 的交点。已知 BC = CD = BE = 4，AE = 6，求 CE + ED。

As shown in the figure 6, A, B, C, D are four points on the circle. E is the intersection point of AC and BD. Given that BC = CD = BE = 4, AE = 6, find CE + ED.

A. 5　　B. 6
C. 7　　D. 8
E. ***

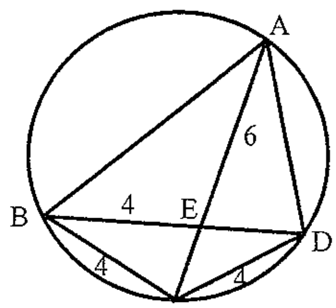

图 6

Figure 6

32. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$。求 $f'(0)$。

Given that $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. Find $f'(0)$.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. $-\dfrac{1}{2}$　　E. ***

33. 求$\cos\frac{2\pi}{2013}+\cos\frac{4\pi}{2013}+\cos\frac{6\pi}{2013}+\ldots\ldots+\cos\frac{2010\pi}{2013}+\cos\frac{2012\pi}{2013}$。

Find $\cos\frac{2\pi}{2013}+\cos\frac{4\pi}{2013}+\cos\frac{6\pi}{2013}+\ldots\ldots+\cos\frac{2010\pi}{2013}+\cos\frac{2012\pi}{2013}$.

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1　　E. ***

34. 若$c>0$且直线$y=2x+c$与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$的最短距离为$2\sqrt{5}$，求$c$的值。

If $c>0$, and the shortest distance between the line $y=2x+c$ and the ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ is $2\sqrt{5}$, find the value of c.

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 15　　E. ***

35. A，B，C，D，E 五人参加一幸运抽奖，已知

若 A 得奖，则 B 得奖或 C 得奖；

若 B 得奖，则 A 不得奖或 C 得奖；

若 C 得奖，则 B 不得奖；

若 C 不得奖，则 D 得奖；

若 E 得奖，则 A 得奖且 C 不得奖；

若 E 不得奖，则 B 得奖。

A，B，C，D，E 这五人中，有多少人得奖?

Five persons A, B, C, D, E take part in a lucky draw. Given that:

If A wins a prize, then B wins a prize or C wins a prize;

If B wins a prize, then A does not win a prize or C wins a prize;

If C wins a prize, then B does not win a prize;

If C does not win a prize, then D wins a prize;

If E wins a prize, then A wins a prize and C does not win a prize;

If E does not win a prize, then B wins a prize.

Among the five persons A, B, C, D, E, how many of them win a prize?

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1